8 Tangentna ravan i normala na površ

Tangentna ravan na površ S u tački M je ravan koja prolazi kroz tačku M i ima osobinu da je rastojanje promjenjive tačke M' na površi od ove ravni kad M' teži ka M beskonačno mala veličina u poređenju sa rastojanjem MM'.

Normala površi u datoj tački površi je prava koja prolazi kroz ovu tačku i normalna je na tangentnu ravan u ovoj tački prave.

Neka je površ data vektorskom jednačinom $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$ ili u parametarskom obliku

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

gdje je Jacobijeva matrica $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$ ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n} = (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v), \quad \vec{r}'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Ako je površ zadata jednačinom $F(x,y,z) = 0$, tada je $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$.

Ako je površ zadata jednačinom $z = f(x,y)$ tada je $\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$.

5. Odrediti jednačinu tangentne ravni površi $S: x = 2u - v, y = u^2 - v^2, z = u^3 - v^3$ u tački $M_0(3,5,7)$ te površi.

6. Dokazati da je tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi $(x-2z)^m + (y-3z)^n = 4$, $m, n \in \mathbb{N}$, paralelna pravoj $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

7. Naći tangentu na krivu $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = F_1(x,y,z) = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z = F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ u tački $M(-2,1,6)$.

8. Dokazati ortogonalnost sljedećih površi: (a) $xy = az^2$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = b$; (c) $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

9. Pokazati da su površi $x^2 + y^2 + z^2 = x$ i $x^2 + y^2 + z^2 = y$ ortogonalne.

10. Pokazati da sve tangentne ravni na površ $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ prolaze kroz stalnu tačku.

11. Odrediti jednačine normale i jednačinu tangentne ravni površi $z = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$ u tački $(3;4;z(3;4))$.

12. Dokazati da tangentne ravni površi $z = \frac{1}{xy}$ tvore s koordinatnim ravnima piramide konstantne zapremine.

13. Površ Γ data je jednačinama

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3}u^2 v.$$

Pokazati da je u svakoj tački krive $v = 0$ na toj površi oskulatorna ravan te krive istovremeno i tangentna ravan površi Γ.

14. Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

15. Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ odsjecaju od koordinatnih osa odsječke čiji je zbir jednak a.

16. Naći udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od tangentne ravni (helikoida) $y=x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$ u tački $(a;a;\frac{\pi a}{4})$.

17. Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ u tački $M(2;2;1)$.